Generalize Inverse Matrices[1] (Matrik Kebalikan Umum)

Oleh: Suryana

Definisi 1. (Searle, 1971)

MKU dari matrik **A** adalah sembarang matrik **G** yang memenuhi persamaan:

$$\mathbf{AGA} = \mathbf{A} \qquad (1.1)$$

Matrik **G** tidak bersifat tunggal. Salah satu cara untuk menunjukkan ketidaktunggalannya adalah dengan membentuk matrik diagonal dari **A**. Jika **A** berdimensi *pxq* direduksi menjadi bentuk diagonal dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{P}_{pxp}\mathbf{A}_{pxq}\mathbf{Q}_{qxq} = \mathbf{\Delta}_{pxq} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{rxr} & \mathbf{0}_{rx(q-r)} \\ \mathbf{0}_{(p-r)xr} & \mathbf{0}_{(p-r)x(q-r)} \end{bmatrix},$$

atau, secara sederhana, dinyatakan

$$\mathbf{P}_{pxp}\mathbf{A}_{pxq}\mathbf{Q}_{qxq} = \mathbf{\Delta}_{pxq} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

dengan **P** dan **Q**, perkalian operator basis, r rank matrik **A**, dan $\mathbf{D}_r$ matrik diagonal orde r. Secara umum jika $d_1, \ldots, d_r$ menyatakan elemen matrik diagonal **D** dapat digunakan notasi $\mathbf{D}\{d_i\}$ untuk $\mathbf{D}_r$, sebagai contoh,

$$\mathbf{D}_r \equiv \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & d_r \end{bmatrix} \equiv diag\{d_i\} \equiv \mathbf{D}\{d_i\} \text{ untuk } i = 1, \ldots, r. \qquad (1.2)$$

Penurunan **G** menjadi lebih mudah dari $\mathbf{\Delta}$ karena MKU dari $\mathbf{\Delta}$, dinyatakan dengan $\mathbf{\Delta}^-$ adalah

$$\mathbf{\Delta}^- \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{\Delta}^-\mathbf{P}, \qquad (1.3)$$

Akan memenuhi persamaan (1.1). Dengan demikian **G** adalah MKU dari **A**.

---

[1] Disarikan dari Searle, S.R., (1971), *Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc: New York, hal. 1-7.

Bukti:

$\mathbf{\Delta}^{-}$ adalah MKU dari $\mathbf{\Delta}$ karena,

$$\mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta}^{-}\,\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta} \qquad (1.4)$$

Selanjutnya,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^{-1}, \qquad (1.5)$$

Maka (1.3),(1.4), dan (1.5) memberikan

$$\mathbf{AGA} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\Delta^{-}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Delta}\Delta^{-}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A},$$

Dengan demikian **G** adalah MKU dari **A**.

Contoh 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah-langkah penyelesaian:

a. Bentuk matrik diagonal dengan perkalian basis untuk mendapatkan **P** dan **Q**. Langkah-langkahnya, sebagai berikut:

(i) Tukar elemen baris ke-2 dengan elemen baris ke-1.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) Kalikan baris-1 dengan -4 tambahkan ke baris-2 dan kalikan baris-1 dengan -3 tambahkan ke baris-3.

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix}$$

(iii) Kalikan baris-2 dengan -2/3 tambahkan ke baris-3.

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) $\mathbf{P} = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$

(v) Untuk mendapatkan matrik **Q** dilakukan dengan perkalian basis dari operasi kolom dari langkah (iii). Pertama kalikan kolom-1 dengan -1 dan tambahkan pada kolom-2; kedua, kalikan kolom-1 dengan -5 dan tambahkan pada kolom-3; ketiga, kalikan kolom-2 dengan -6 dan tambahkan ke kolom-3. Sehingga, operator basisnya adalah:

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PAE}_6\mathbf{E}_7\mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{\Delta}$$

(vi) $$\mathbf{Q} = \mathbf{E}_6\mathbf{E}_7\mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(vii) $$\mathbf{\Delta}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(viii) $$\mathbf{G} = \mathbf{Q\Delta}^-\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

(ix) $$\mathbf{G} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selain cara di atas, terdapat cara yang lebih mudah yaitu dengan mempartisi matri **A** menjadi,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Dengan $\mathbf{A}_{11}$ berdimensi *rxr* dan *r* menyatakan rank matrik **A**; $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$, dan $\mathbf{A}_{22}$ merupakan matrik nol. MKU dari **A** adalah

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Sehingga

$$\mathbf{AGA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Dengan cara seperti ini, maka contoh 1 di atas akan dengan mudah diselesaikan. Dalam hal ini,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

karena rank (**A**) **=** 2. Dengan demikian

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ mudah bukan?}$$

Sebagaimana telah disampaikan sebelumnya, MKU dari **A** tidak unik. Lalu, bagaimana mendapatkan MKU lainnya. Searle(1971) dengan jenius mengemukakan algoritma singkatnya sebagai berikut:

(i) Dalam matrik **A** dengan rank *r*, temukan sembarang matrik minor non-singular dengan orde *r*. Notasikan dengan **M**.
(ii) Temukan invers matrik **M**, yaitu $\mathbf{M}^{-1}$ kemudian tranposekan, $(\mathbf{M}^{-1})^t$.
(iii) Dalam matrik **A**, ganti setiap elemen matrik **M** dengan elemen matrik $(\mathbf{M}^{-1})^t$.
(iv) Dalam matrik **A**, ganti elemen lainnya dengan nol.
(v) Transposekan matrik **A**.
(vi) Hasilnya berupa matrik **G**, MKU dari **A**.

Contoh 2.

Matrik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Mempunyai beberapa MKU sebagai berikut:

(i) $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{M}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^t = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dengan langkah sama, MKU lainnya dari **A** di antaranya:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/10 & 15/10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & -1/10 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 5/20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/20 & 0 & 4/20 \end{bmatrix}$$

Dengan mengambil matrik minor

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$